

1. Dinámica de fluidos

1.1	Magnitudes físicas	5
1.2	Unidades	6
1.3	Análisis dimensional	9
1.4	Notación científica	10
1.5	Vectores	11
	Ejercicios	19

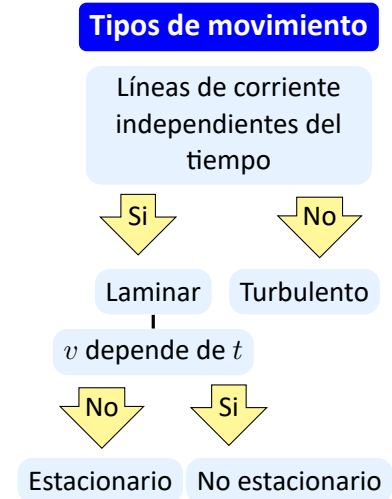
En el estudio de los fluidos, las propiedades dinámicas son de especial interés para las ciencias de la vida, sobre todo por su aplicación al sistema circulatorio. En concreto, un objetivo importante es conocer cuánto vale la presión sanguínea en cada tramo de su recorrido en función de la anchura de las arterias y venas, la viscosidad de la sangre, etc...

1.1 Conceptos generales

Existen diversos tipos de movimiento de los fluidos con propiedades muy distintas entre sí, por lo que es conveniente realizar, en primer lugar, una adecuada clasificación de los mismos. Siempre que la velocidad del fluido sea baja, el movimiento es ordenado, las líneas de corriente (que se definen como las trayectorias que siguen los diversos elementos de fluido) no se entrecruzan y tratan de mantenerse lo más paralelas posible, tanto entre sí, como con respecto a las paredes. Además, estas líneas de corriente no cambian con el tiempo. Dicho tipo de movimiento se dice que es **laminar**.

El régimen anterior se puede subdividir en dos tipos de movimiento: estacionario y no estacionario. Se define el régimen **estacionario** como aquél en que la velocidad del fluido en cada punto no cambia con el tiempo (aunque la velocidad de una molécula del fluido sí que puede variar de un punto a otro). En este tipo de movimiento, las moléculas cuando pasan por un punto siempre lo hacen con la misma velocidad. Nos concentraremos en este tipo de movimiento por su simplicidad y porque además contiene gran parte de la física de interés de los problemas reales con movimientos más complicados. Por otra parte, en el régimen **no estacionario** la velocidad del fluido en un punto cualquiera varía en general con el tiempo. Las líneas de corriente, no obstante, siguen estando bien definidas y no varían con el tiempo.

Cuando la velocidad de un fluido es lo suficientemente elevada, el movimiento se hace desordenado, las líneas de corriente se entrecruzan y varían con el tiempo, se forman remolinos detrás de los obstáculos, etc... A dicho régimen se le denomina **turbulento**.



Caudal

Para poder cuantificar la cantidad de fluido que circula por un conducto, definimos el **caudal** o flujo Q a través de una sección dada como el volumen de fluido que la atraviesa por unidad de tiempo.

$$Q = \frac{V}{t} \quad (1.1)$$

El caudal se mide en m^3/s . Podemos calcular su valor en función de la velocidad media del fluido en la sección considerada. El volumen ΔV que atraviesa dicha sección en la unidad de tiempo es igual al producto del área de la sección, A , por la distancia recorrida por las moléculas del fluido en la unidad de tiempo Δx . Es decir, $\Delta V = A \Delta x$ (ver figura ??). Hemos supuesto que la sección es perpendicular al conducto por el que viaja el fluido. Como el espacio es igual a la velocidad por el tiempo, $\Delta x = v \Delta t$, la distancia recorrida por unidad de tiempo es igual a la velocidad. En el caso de que las partículas del fluido que atraviesan la sección considerada posean velocidades diferentes, v se referirá a su velocidad media. Así pues, el caudal Q viene dado por

$$Q = A v \quad (1.2)$$

Este resultado es independiente del tipo de movimiento de que se trate.

Ecuación de continuidad

La primera propiedad importante que podemos descubrir en la dinámica de fluidos es la ecuación de continuidad, que es una manifestación del principio de conservación de la materia.

Consideremos un fluido moviéndose en régimen laminar estacionario en un conducto cualquiera, tal como el que se representa en la figura ?. Consideremos dos secciones cualesquiera, 1 y 2, per-

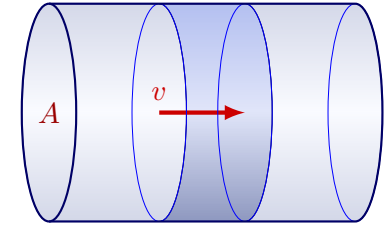


Figura 1.1: Caudal que atraviesa una sección.

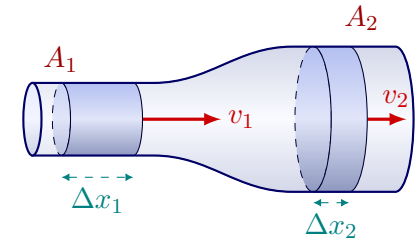


Figura 1.2: El caudal a través de dos secciones cualesquiera ha de ser el mismo.

pendiculares al conducto y de áreas A_1 y A_2 , respectivamente. Las velocidades medias del fluido en ambas secciones son v_1 y v_2 . La masa de fluido que atraviesa la sección 1, en un intervalo Δt , es $m_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$. Un resultado similar es válido para la sección 2. El principio de conservación de la materia nos asegura que la cantidad de fluido a través de estas dos secciones ha de ser la misma. De lo contrario, tendría que crearse o destruirse fluido en la región comprendida entre las dos secciones, lo que suponemos que no es posible. Por tanto:

$$m_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t = m_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t \quad (1.3)$$

La ecuación de continuidad adquiere una forma especialmente sencilla cuando la densidad del fluido se mantiene constante. Se dice que se trata de un fluido **incompresible**. Este es el caso en muchas situaciones de interés, sobre todo en los líquidos, y será lo que consideraremos aquí. En concreto, esto se verifica, en muy buena aproximación, en el caso de la sangre en el sistema circulatorio, pues las presiones a las que está sometida apenas afectan a su densidad.

Cuando la densidad ρ es constante, podemos eliminarla de la ecuación (1.3), y deducimos que el caudal es independiente de la sección. La ecuación de continuidad nos dice, así pues, que el producto del área de una sección por la velocidad del fluido en ella es una constante, independiente de la sección considerada:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{constante} \quad (1.4)$$

Si tenemos un conducto que se bifurca en dos o más nuevos conductos, la ecuación de continuidad nos asegura que el caudal que atraviesa el primer conducto ha de ser igual a la suma de los caudales que atraviesan los segundos conductos, como se indica en la figura 1.3.

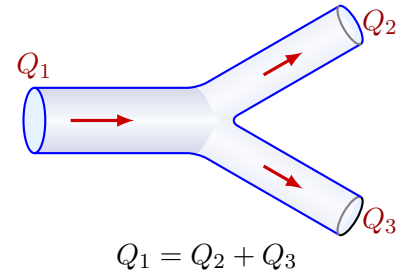


Figura 1.3: En una bifurcación, el flujo entrante es igual a la suma de los flujos salientes.

Ejemplo: Una persona posee una aorta con un radio de 1 cm, y la velocidad media de la sangre en ella es de 0.27 m/s. El área total de sus capilares es 600 veces mayor que la de su aorta. ¿Cuál es su caudal de sangre? ¿Cuál es la velocidad media de la sangre en sus capilares?

El caudal es igual al área por la velocidad media:

$$Q = Av = (\pi 0.01^2) 0.27 = 8.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s} = 5.1 \text{ l/s}$$

La ecuación de continuidad nos dice que el caudal de la aorta ha de ser igual al total a través de los capilares. Por tanto:

$$v_{\text{cap}} = \frac{Av}{A_{\text{cap}}} = \frac{0.27}{600} = 4.5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

1.2 Fluidos ideales: ecuación de Bernoulli

Se denominan fluidos ideales aquéllos con viscosidad nula. Lógicamente, esto es sólo una aproximación a la realidad, pues todos los fluidos presentan, en mayor o menor grado, cierta viscosidad, si bien en el análisis de muchas situaciones podemos considerar que esta es despreciable. La viscosidad es una medida de la fricción del fluido por lo que, al considerar un fluido ideal, estamos despreciando las pérdidas energéticas por rozamiento.

Consideremos un fluido incompresible en régimen estacionario moviéndose en un conducto como el que se muestra en la figura ???. Concentrémonos en la porción de fluido que en un instante t_0 dado está situada entre las secciones 1 y 2. En un instante Δt posterior, dicho elemento de fluido se habrá movido y ocupará ahora la región comprendida entre las secciones 1' y 2'. Calculemos el incremento de energía mecánica que se produce entre estas dos configuraciones. Como se trata de un movimiento

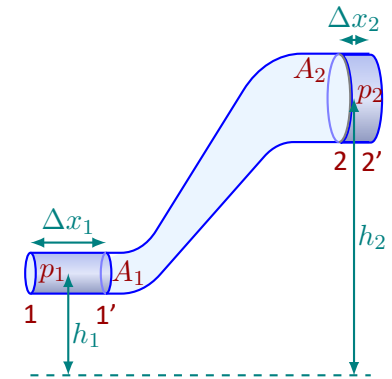


Figura 1.4: Sección de fluido en dos instantes de tiempo.

estacionario, la contribución a la energía mecánica de la parte central, comprendida entre 1' y 2, es común a las configuraciones inicial y final y, por lo tanto, se cancela. El incremento de energía será igual a la diferencia entre la contribución de la región situada entre las secciones 2 y 2', que sólo está ocupada por el trozo de fluido considerado en el instante final, y la de la región comprendida entre las secciones 1 y 1', que solamente está ocupada en el instante inicial. La energía mecánica de cada parte es igual a la suma de sus energías cinética y potencial (gravitatoria). Así, la correspondiente a la región 1-1' es:

$$E_1 = m_1gh_1 + \frac{1}{2} m_1v_1^2 \quad (1.5)$$

en donde h_1 es la altura media y v_1 la velocidad media del fluido en la región 1-1'. m_1 es la masa del fluido contenido en dicha región, igual a $\rho A_1v_1\Delta t$. Una expresión similar es válida para la región 2-2'. La ecuación de continuidad nos asegura que la cantidad de flujo es la misma para ambas regiones, $m_1 = m_2 = m$. La diferencia energética buscada es, por tanto:

$$\Delta E = mgh_2 - mgh_1 + \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad (1.6)$$

El cambio de energía mecánica ha de ser igual al trabajo realizado sobre el elemento de fluido considerado por el resto del fluido. Aunque las paredes del conducto también ejercen una fuerza sobre el fluido, como reacción a la presión que este hace sobre ellas, aquella no produce trabajo por ser perpendicular a la dirección del movimiento. El fluido posterior al considerado empuja a este con una fuerza p_1A_1 a lo largo de la distancia $v_1\Delta t$, y realiza, por lo tanto, un trabajo igual a $p_1A_1v_1\Delta t$. El fluido que precede al considerado realiza un trabajo negativo, $-p_2A_2v_2\Delta t$, debido a que se opone al movimiento. El trabajo total sobre el fluido es:

$$W = p_1A_1v_1\Delta t - p_2A_2v_2\Delta t \quad (1.7)$$

Recordemos que la ecuación de continuidad nos dice que $A_1v_1 = A_2v_2$.

Si igualamos el trabajo realizado, dado por la ecuación anterior, al cambio de energía mecánica, ecuación (??), eliminamos de la ecuación resultante los factores comunes a todos los términos, $A_1 v_1 \Delta t$, y reordenamos estos de acuerdo con la sección a la que corresponden, se llega finalmente a:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (1.8)$$

resultado que se conoce como ecuación de Bernoulli. Dado que las secciones 1 y 2 son cualesquiera, deducimos que la expresión anterior es independiente de la sección.

Si hacemos $v_1 = v_2 = 0$ en la ecuación de Bernoulli, reproducimos el teorema fundamental de la estática de fluidos.

Una primera consecuencia de la ecuación de Bernoulli es el **efecto Venturi**, que consiste en la disminución de presión que se origina en todo estrechamiento. La velocidad del fluido aumenta en los estrechamientos, como nos indica la ecuación de continuidad, de forma que, a igualdad de alturas, la presión debe disminuir para que se verifique la ecuación de Bernoulli. En este efecto se basan las máquinas de pintura con pistola en las que una corriente de aire a mucha velocidad acaba en un estrechamiento, en donde se encuentra la toma de pintura (o de cualquier otra sustancia). La disminución de presión en el estrechamiento absorbe la pintura, que sale así mezclada con la corriente de aire.

La velocidad de un líquido se puede medir mediante anemómetros basados en la ecuación de Bernoulli. Consisten en un estrechamiento del conducto y dos columnas verticales que nos dan el valor de la presión, mediante la altura a la que asciende el líquido, tal como se muestra en la figura ?? . Si el conducto está en posición horizontal, la ecuación de Bernoulli se reduce a:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1.9)$$

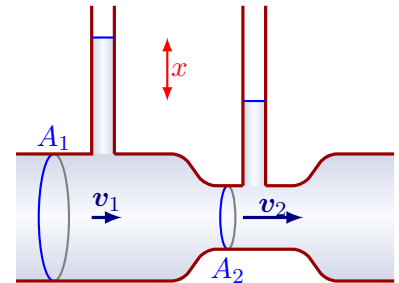


Figura 1.5: La diferencia entre la altura del líquido en los dos conductos nos da la velocidad del mismo.

Como $p_1 - p_2 = \rho g x$, tenemos que la diferencia de altura de las columnas de líquido x es igual a:

$$x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{A^2 - 1}{2g} v_1^2 \quad (1.10)$$

siendo $A = A_1/A_2$ el cociente entre el área del conducto y la del estrechamiento.

Ejemplo: Deseamos calcular la disminución de presión sanguínea que se produce cuando un vaso se estrecha debido, por ejemplo, a una placa de ateroma. Supongamos, en concreto, que se tiene un vaso en posición horizontal por el que la sangre circula a 10 cm/s y en el que existe un estrechamiento que reduce la sección del vaso a la sexta parte de lo normal. Determina la disminución de la presión en milímetros de mercurio.

La ecuación de continuidad nos permite calcular la velocidad de la sangre en el estrechamiento

$$v_2 = \frac{A_1 v_1}{A_2} = 6 v_1 = 0.6 \text{ m/s}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación de Bernoulli, y teniendo en cuenta que el término gravitatorio se cancela, llegamos a:

$$p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \frac{1}{2} 1050 (1 - 36) 0.1^2 = 184 \text{ N/m}^2 = 1.4 \text{ mm de Hg}$$

Conviene notar la pequeñez de este efecto, comparado con las presiones típicas sanguíneas, del orden de 100 mm de Hg, a pesar de lo drástico del estrechamiento considerado. Las consecuencias del término cinético de la ecuación de Bernoulli, $\frac{1}{2} \rho v^2$, son prácticamente despreciables en el sistema circulatorio.

1.3 Fluidos reales: viscosidad

Ahora vamos a estudiar los efectos del rozamiento en el movimiento de los fluidos. Dicho rozamiento se cuantifica a través del concepto de viscosidad. Para ello, consideremos una situación como la de la figura ??, en donde se tiene un fluido comprendido entre dos planos, de área A y separados una distancia d , uno de los cuales está fijo, mientras que sobre el otro se ejerce una fuerza tangencial. La capa de arriba adquiere una velocidad relacionada con el coeficiente de viscosidad, η , a través de:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v}{d} \quad (1.11)$$

En el análisis de las situaciones más complejas, en las que la velocidad no varía uniformemente con la altura, el resultado anterior hay que considerarlo entre capa y capa y la expresión (??) se generaliza a:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dr} \quad (1.12)$$

La fuerza que ejercemos para producir una determinada velocidad en el fluido es igual a la fuerza de rozamiento que sufre el fluido, debida a la viscosidad, y este no se acelera, si no que mantiene una velocidad constante.

De su definición se deduce que el coeficiente de viscosidad tiene unidades de N s/m^2 . A veces aún se usa el *poise*, que equivale a 0.1 N s/m^2 . En el cuadro ?? se muestran los coeficientes de viscosidad, en condiciones normales de presión y temperatura, de algunos fluidos. La viscosidad depende tanto de la presión como de la temperatura. En general, la viscosidad de los líquidos disminuye con la temperatura porque las moléculas poseen más energía cinética y se desplazan más fácilmente. Por el contrario, en los gases la viscosidad aumenta con la temperatura debido a que se producen más

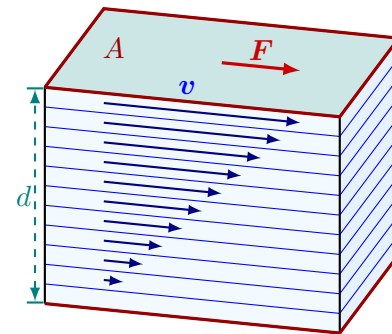


Figura 1.6: Esquema para el cálculo del coeficiente de viscosidad.

Cuadro 1.1: Viscosidad de diversos fluidos.

Fluido	η (N s/m^2)
Aceite	1
Sangre	0.004
Agua	0.001
Aire	$18 \cdot 10^{-6}$

colisiones intermoleculares y, en este caso, más rozamiento.

La ecuación de Bernoulli no es válida cuando existe viscosidad, dado que se pierde energía a causa del rozamiento (viscoso).

1.4 Ley de Poiseuille

La viscosidad hace que la velocidad del fluido, en una sección dada, cambie de un punto a otro, siendo máxima en el centro y tendiendo a cero al acercarnos a las paredes del conducto. También produce una caída de la presión en los conductos. Vamos a calcular ambos efectos para el caso de un conducto cilíndrico.

Consideremos el conducto cilíndrico de radio R y longitud L , tal como se muestra en la figura ??, en régimen estacionario. Centrémonos en un cilindro imaginario de fluido de radio r y concéntrico con el conducto y calculemos las fuerzas de rozamiento y de empuje que actúan sobre él.

La fuerza de rozamiento es entre la capa más externa de nuestro cilindro y el resto del fluido, de área $2\pi r L$. De acuerdo con la definición de viscosidad, la fuerza de rozamiento que buscamos es igual a:

$$F_r = \eta(2\pi r L) \left| \frac{dv}{dr} \right| \quad (1.13)$$

La fuerza de empuje es debida a la diferencia de presiones entre las caras inicial y final, de sección πr^2 , y viene dada por:

$$F_e = (p_1 - p_2)\pi r^2 \quad (1.14)$$

siendo p_1 y p_2 las presiones en los extremos inicial y final, respectivamente, del cilindro. Al igualar estas dos fuerzas, ecuaciones (??) y (??), resulta una ecuación diferencial en la que r es la variable

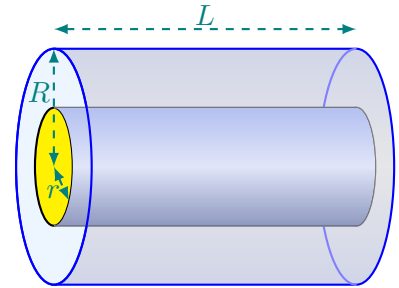


Figura 1.7: Sección de fluido considerada para el cálculo de la velocidad.

independiente y v la variable dependiente. Para resolver dicha ecuación se pasan los factores que dependen explícitamente de r a un lado y los que dependen de v al otro y se integran ambos términos teniendo en cuenta que la velocidad en el borde a de ser nula, llegándose a:

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4\eta L} (R^2 - r^2) \quad (1.15)$$

Esta ecuación predice una dependencia parabólica de la velocidad con el radio, tal como se muestra en la figura ???. Al cociente $p_1 - p_2/L$ se le denomina gradiente de la presión, o caída de presión por unidad de longitud.

El caudal total que atraviesa el conducto es la integral del caudal correspondiente a una sección anular de radio r y espesor dr , igual al área de dicha sección, $2\pi r dr$, multiplicada por la velocidad del fluido en esa capa. El resultado se conoce como ley de Poiseuille, que nos dice que el caudal con el que un fluido viscoso atraviesa un conducto viene dado por:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta} \quad (1.16)$$

A esta ley se le conoce con ese nombre en honor del investigador francés que la descubrió experimentalmente antes de que se conocieran sus fundamentos teóricos.

Como el caudal total es igual a la sección, πR^2 , multiplicada por la velocidad media, deducimos que esta es igual a:

$$v_{\text{media}} = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{R^2}{8\eta} \quad (1.17)$$

La velocidad media de un fluido viscoso es igual a la mitad de la velocidad máxima, que es la del fluido en el centro del cilindro, $r = 0$.

Cuando alguna región del organismo necesita un mayor riego sanguíneo, el sistema nervioso actúa

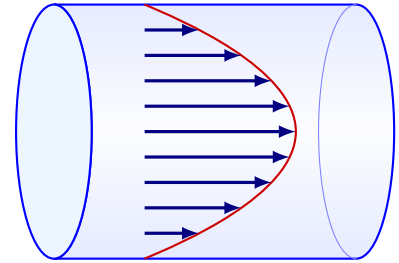


Figura 1.8: Distribución de velocidades en una sección.

sobre las fibras musculares lisas que rodean las paredes de los conductos sanguíneos, haciendo que aumenten su tamaño. La dependencia de Q con R^4 predicha por la ley de Poiseuille hace que la acción anterior sea tremendamente efectiva.

Ejemplo: Supongamos un vaso sanguíneo de 2 mm de radio y 20 cm de longitud por el que la sangre circula con una velocidad media de 10 cm/s. Calcula la caída de presión que en él se produce.

Teniendo en cuenta que el caudal lo podemos escribir como el producto de la sección del vaso por la velocidad media, a partir de la ley de Poiseuille deducimos:

$$\Delta p = \frac{8\eta L Q}{\pi R^4} = \frac{8\eta L v_{\text{media}}}{R^2} = \frac{8 \cdot 0.004 \cdot 0.2 \cdot 0.1}{0.002^2} = 160 \text{ N/m}^2 = 1.2 \text{ mm de Hg}$$

1.5 Número de Reynolds

La mayoría de los problemas de física de fluidos son de muy difícil resolución. Por ello, se han desarrollado programas numéricos encaminados a tal fin y, además, es necesario realizar abundantes ensayos experimentales en túneles aerodinámicos. El análisis dimensional también es de gran ayuda.

Un problema de interés es la determinación de la fuerza, denominada de arrastre, que experimenta un objeto en el seno de un fluido. Es lo mismo si se mueve el objeto respecto del fluido, que si ocurre al revés. Lo importante es la velocidad relativa entre ambos. La fuerza de arrastre es una combinación de la fuerza inercial, debida al empuje del fluido, y de la de rozamiento, debida a la viscosidad.

La fuerza de inercia es igual a la contribución cinemática a la presión, $\frac{1}{2} \rho v^2$, por el área típica del objeto, D^2 :

$$F_i \approx \rho v^2 D^2 \quad (1.18)$$

Los factores constantes del orden de la unidad no nos preocupan.

La fuerza de rozamiento es proporcional al coeficiente de viscosidad, a la velocidad y al tamaño de la región de contacto, proporcional a la longitud típica del objeto:

$$F_r \approx \eta v D \quad (1.19)$$

Al cociente entre la fuerza inercial y la de rozamiento se le denomina número de Reynolds Re y viene dado por:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} \quad (1.20)$$

El número de Reynolds es una magnitud adimensional. Es de importancia fundamental en la física de fluidos. Si tenemos dos sistemas con el mismo número de Reynolds, sus movimientos serán semejantes. Las características fundamentales del movimiento, tales como la aparición de la turbulencia o la relación entre los dos tipos de fuerzas, serán las mismas en ambos casos. Cuando el número de Reynolds es muy pequeño domina la fuerza de rozamiento y cuando es muy grande la inercial.

Los ensayos con maquetas se basan en este resultado: las maquetas se mueven de forma que el número de Reynolds resultante coincida con el del objeto real en la situación real. Teniendo en cuenta las densidades y los coeficientes de viscosidad del aire y del agua, encontramos que el número de Reynolds de un objeto en ambos fluidos coincide si la velocidad en el aire es 16 veces mayor que en el agua. En vez de experimentar en un túnel de agua, podemos hacerlo en un túnel de aire con una velocidad 16 veces mayor.

Ley de Stokes

Los objetos muy pequeños se suelen mover con números de Reynolds muy bajos para los que domina la fuerza de rozamiento, ecuación (??). La constante de proporcionalidad en esta ecuación depende de la forma del objeto. Para la esfera es posible un cálculo analítico de la fuerza de rozamiento, que proporciona el valor de dicha constante:

$$F_r = 6\pi\eta vr \quad (1.21)$$

en donde r es el radio de la esfera. Esta expresión se conoce como ley de Stokes.

Cuando una disolución precipita, la velocidad de sedimentación está determinada por la ley de Stokes. Cuando la partícula que precipita se mueve con velocidad constante, la fuerza de rozamiento ha de ser igual al peso, menos el peso del fluido desalojado:

$$F_r = 6\pi\eta vr = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho_0 - \rho)g \quad (1.22)$$

ρ_0 es la densidad del objeto. Despejando en la ecuación anterior, obtenemos la velocidad de sedimentación de una partícula esférica:

$$v = \frac{2r^2(\rho_0 - \rho)g}{9\eta} \quad (1.23)$$

La velocidad de sedimentación de la sangre es una medida habitual en los análisis clínicos, ya que depende del grado de agregación y deformación de los glóbulos rojos que varían notablemente de la sangre normal a la patológica.

La medida de la velocidad de sedimentación de una esfera, de densidad conocida, nos permite determinar el coeficiente de viscosidad del fluido en el que se mueve, a través de la expresión anterior, (??).

Ejemplo: Una esfera de 1 mm de radio y 1.03 kg/l de densidad posee una velocidad de descenso de 0.06 m/s en un líquido con una densidad de 0.95 kg/l. Determina el coeficiente de viscosidad del líquido.

El coeficiente de viscosidad del líquido lo obtenemos despejando de la expresión de la velocidad de sedimentación, (??):

$$\eta = \frac{2r^2(\rho_0 - \rho)g}{2v} = \frac{2 \cdot 0.001^2(1030 - 950)9.8}{9 \cdot 0.06} = 0.0029 \text{ N s/m}^2$$

Natación

La forma de desplazarse de los organismos vivos en los fluidos es muy variada, pero está influenciada en primer lugar por el número de Reynolds correspondiente. Los seres pequeños se mueven a poca velocidad, de forma que tanto la longitud como la velocidad contribuyen a que posean números de Reynolds pequeños. Los animales grandes, por el contrario, se mueven con números de Reynolds muy elevados. Los números de Reynolds abarcan un rango enorme, desde 10^{-6} para una bacteria, hasta 10^8 para la ballena azul.

La práctica totalidad de los animales macroscópicos se mueven en el régimen en donde las fuerzas inerciales dominan. Nuestra intuición corresponde a dicho régimen. Cuando nadamos nos impulsamos al desplazar agua en el sentido opuesto, lo cual es posible porque la inercia del agua es mayor que su rozamiento. La forma de nadar de los peces se adapta a sus características, teniendo en cuenta la relación entre las fuerzas de inercia y de rozamiento. Así, un pez rápido poseerá amplias aletas, capaces de desplazar gran cantidad de agua, pero que por otra parte producen un considerable rozamiento. En el otro extremo, los peces que recorren grandes distancias poseen formas alargadas y suaves, que minimizan el rozamiento, aún a coste de una menor capacidad de aceleración.

Los organismos microscópicos se propulsan de una forma muy diferente a la que estamos acostumbra-

dos. Es como si tuviéramos que movernos dentro de asfalto. La fuerza de rozamiento es tan elevada que no seríamos capaces de desplazar al fluido, de forma que apenas avanzaríamos. Los microorganismos consiguen desplazarse gracias a determinados mecanismos, con el común denominador de la flexibilidad. Es como si emplearan un remo rígido en el momento de propulsar, pero flexible cuando se retrae.

1.6 Turbulencia

Hasta ahora únicamente hemos considerado fluidos moviéndose en régimen laminar, es decir, de manera ordenada. Los efectos de la viscosidad se han limitado a producir una caída de la presión a lo largo del conducto y una diferencia de velocidades entre las diversas capas del fluido, que, no obstante, seguían moviéndose paralelamente. Cuando en un determinado conducto aumentamos la diferencia de presión entre sus extremos, el caudal que lo atraviesa también aumenta, si bien llega un momento en que ya no lo hace linealmente, como predice la ley de Poiseuille. El comportamiento de Q frente a Δp es de la forma representada en la figura ?? . El valor crítico de Δp en el que esta curva se desvía de la línea recta depende tanto del conducto como del fluido. Dicha desviación se debe a la presencia de turbulencias, que hacen inaplicable el razonamiento utilizado para obtener la ley de Poiseuille.

En el régimen turbulento el fluido realiza un movimiento caótico. Las líneas de corriente dejan de ser paralelas entre sí, y además cambian con el tiempo. Es como si las moléculas del fluido, al tratar de ir más rápido de lo que de hecho pueden, adquirieran una velocidad lateral en vez de aumentar únicamente su velocidad longitudinal, originándose de esta forma cierto desorden. Después de bordear el fluido cualquier obstáculo se producen los conocidos remolinos. El caudal turbulento es ineficiente desde un punto de vista energético y debe tratar de evitarse en general.

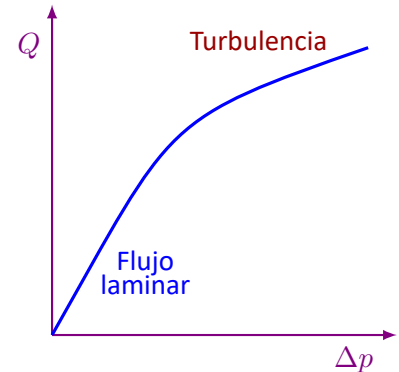


Figura 1.9: Caudal en función de la presión.

La tendencia a la turbulencia viene determinada por el valor del número de Reynolds, ecuación (??). Se encuentra experimentalmente que cuando el número de Reynolds es menor de 2000, aproximadamente, cualquier turbulencia que se origina tiende a decaer, y lo hará tanto más rápido cuanto menor sea Re . Por el contrario, cuando $Re > 2000$, si se produce turbulencia, generalmente debido a la presencia de algún obstáculo, esta ya no decae. En ausencia de obstáculos y perturbaciones, es posible conseguir flujos laminares para números de Reynolds elevados, incluso de hasta 100000.

Ejemplo: ¿Es posible encontrar régimen turbulento en el sistema circulatorio?

Hemos de calcular su máximo valor posible del número de Reynolds. Debemos buscar, por tanto, el máximo valor del producto vD . Como veremos más adelante, la velocidad sanguínea es máxima en la aorta, que además es el vaso que posee el mayor diámetro. Valores típicos de estas dos magnitudes son $v = 0.3$ m/s y $D = 0.02$ m. Así, el valor máximo del número de Reynolds Re en el sistema circulatorio es:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1050 \cdot 0.3 \cdot 0.02}{0.004} = 1575$$

Como Re ha resultado ser menor de 2000, cualquier turbulencia que se produzca se amortiguará. No obstante, es necesario señalar que, en el caso extremo considerado, a pesar de no llegarse al régimen turbulento se está ya cerca de él. Al aumentar la velocidad de la sangre, por ejemplo, cuando se realiza algún ejercicio o en algún estrechamiento de los vasos sanguíneos, puede alcanzarse dicho régimen.

1.7 Circulación sanguínea

La circulación sanguínea en los mamíferos, y en especial en el hombre, se realiza por medio de un sistema cerrado constituido por una bomba de presión, el corazón, y una serie de conductos, las

arterias y las venas. Dichos conductos forman un doble circuito, una de cuyas ramas va a los pulmones, mientras que la otra riega el resto del organismo. El corazón impulsa la sangre pobre en oxígeno hasta los pulmones en donde esta capta oxígeno y luego regresa al corazón en donde es impulsada de nuevo hacia el resto del cuerpo en donde va cediendo el oxígeno.

El objetivo principal del sistema circulatorio es llevar oxígeno a los tejidos y retirar de ellos el dióxido de carbono. Otros objetivos son el transporte de nutrientes y de desechos, el equilibrio del agua y de electrolitos, y el transporte calorífico y la regularización térmica del organismo.

La sangre, impulsada por el corazón, viaja primero por arterias elásticas anchas que paulatinamente se van ramificando, al mismo tiempo que se van haciendo más estrechas y menos elásticas, pasando a llamarse arteriolas. De las arteriolas la sangre pasa a los capilares, cuyo diámetro es incluso menor que el de un glóbulo sanguíneo, por lo que el transporte en ellos es muy singular. La sangre pasa después a las vénulas que se van agrupando en venas mayores, hasta que finalmente regresa al corazón.

Sistemas arterial y venoso

El corazón humano bombea la sangre con una presión media de 100 mm de Hg (por encima de la presión atmosférica). Este bombeo, al igual que el flujo que origina, no es continuo, sino que se produce por pulsos con un valor máximo de unos 125 mm de Hg (presión sistólica) y mínimo de unos 75 mm de Hg (presión diastólica), a un ritmo de unos 70 latidos por minuto. Estudiaremos primero los efectos relativos a los valores medios, y después los relativos a los fenómenos pulsátiles. En el cuadro ?? mostramos los valores típicos de diversas propiedades del sistema cardiovascular humano de un adulto medio.

Debido a la viscosidad de la sangre, la presión va disminuyendo conforme nos separamos del corazón y cuando regresa a él posee una presión prácticamente nula. En la figura ?? se representa la presión

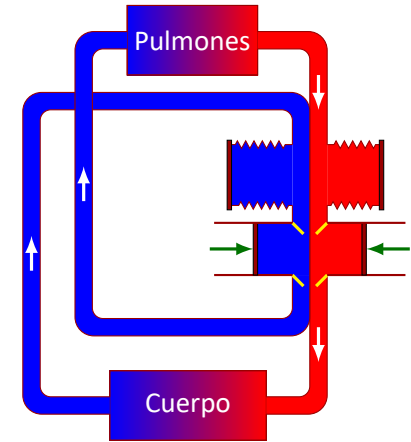


Figura 1.10: Esquema del sistema circulatorio humano. En las zonas en rojo la sangre es rica en oxígeno.

existente en cada uno de los diferentes tipos de conductos sanguíneos. También se muestra (área sombreada) el rango de oscilación de la presión en cada zona. En todo lo anterior no se ha tenido en cuenta el efecto de la gravedad, que depende de la altura del vaso con respecto del corazón. Cuando dicho efecto se incluye, hay que añadir a los valores anteriores de la presión el término hidrostático, ρgh .

Aplicando la ley de Poiseuille suponiendo una velocidad sanguínea constante, uno espera una caída de presión mucho mayor en los conductos más estrechos que en los más anchos. Esto no ocurre debido a que la velocidad de la sangre disminuye en los conductos más estrechos. Al bifurcarse las arterias, el número y la sección de cada una de las que se crean es tal que la sección total nueva es mayor que la antigua, por lo que la velocidad media nueva es menor. Mientras que la sección de la aorta es de algo más de 3 cm^2 y la velocidad de la sangre en ella de unos 25 cm/s , la sección total de los capilares es unas 500 veces mayor, y la velocidad de la sangre en ellos es unas 500 veces menor que en la aorta.

En el sistema circulatorio pulmonar, la presión media de salida del corazón es de unos 15 mm de Hg y la de entrada de unos 5 mm de Hg. El caudal medio ha de ser estrictamente el mismo en los dos circuitos sanguíneos, por tratarse de un sistema cerrado.

La caída de presión en las venas es mucho menor que en las arterias, de tan sólo unos 15 mm de Hg. Varios mecanismos ayudan a la sangre a mantener el caudal adecuado a pesar de tan pequeña diferencia de presiones. El más importante se debe a la acción combinada de los músculos de las piernas, que al caminar comprimen rítmicamente las venas, y las válvulas existentes en las venas de las piernas. La unidireccionalidad relativa de dichas válvulas favorece el flujo hacia el corazón, lo que facilita la circulación de retorno.

El sistema circulatorio posee importantes mecanismos de regulación y control. Cuando una parte del organismo necesita un mayor riego sanguíneo, la musculatura lisa de las arteriolas cede parte de su

Cuadro 1.2: Parámetros típicos del sistema circulatorio

Propiedad	Valor
Presión sistólica	125 mm Hg
Presión diastólica	75 mm Hg
Presión media	100 mm Hg
Presión pulmones	15 mm Hg
Presión venas	15 mm Hg
Volumen sangre	5.2 l
Caudal medio	5 l/s
Sección aorta	3 cm^2
Sección capilares	1500 cm^2
Radio arteria	0.5 cm
Radio capilar	$6\text{ }\mu\text{m}$
Pulsaciones	75 min^{-1}
Potencia corazón	1.2 W

tensión, lo que hace aumentar su radio y el caudal que las atraviesa. Sensores de presión, situados en determinadas arterias, regulan la actividad del corazón y la resistencia total del circuito para tratar de mantener constante la presión y que los cambios en la actividad induzcan fundamentalmente variaciones del caudal.

Ejemplo: Se tiene un vaso sanguíneo de radio R_1 que se ramifica en n vasos iguales de radio R_2 . Calcula el valor de R_2 , en función de R_1 y n , para que la caída de presión por unidad de longitud antes y después de la ramificación sea la misma.

La ecuación de continuidad nos dice que el caudal antes y después de la ramificación ha de ser el mismo:

$$(\pi R_1^2) v_1 = n (\pi R_2^2) v_2$$

siendo v_1 y v_2 las velocidades en los conductos inicial y finales, respectivamente. La caída de presión por unidad de longitud es, según la ley de Poiseuille, ecuación (??), igual a:

$$\frac{\Delta p}{L} = \frac{8\eta(\pi R_1^2) v_1}{\pi R_1^4} = \frac{8\eta(\pi R_2^2) v_2}{\pi R_2^4}$$

De las ecuaciones anteriores, se obtiene el resultado buscado:

$$R_2^2 = \frac{R_1^2}{\sqrt{n}} \quad (1.24)$$

Supongamos, por ejemplo, que una arteria se transforma, después de varias ramificaciones, en 100 arteriolas. $\Delta p/L$ será el mismo en los casos inicial y final si la sección de cada arteriola es $\sqrt{n} = 10$ veces menor que la de la arteria. La sección total de las arteriolas será, por tanto, $\sqrt{n} = 10$ veces mayor que la de la arteria.

Efectos pulsátiles

La elasticidad de las arterias desempeña un papel muy importante en los fenómenos pulsátiles. En primer lugar, hace que el trabajo del corazón sea más efectivo. Si las paredes de las arterias fueran rígidas, toda la masa del fluido tendría que acelerarse y desacelerarse en cada pulsación. Sin embargo, al tratarse de paredes elásticas, sólo se produce una aceleración y un cambio de volumen locales. Así, el corazón en un sistema flexible hace bastante menos trabajo del que tendría que hacer para mover un mismo caudal en un sistema rígido. Las arterias se hacen más rígidas con la edad, y el corazón ha de realizar entonces un mayor esfuerzo.

Microcirculación

En las arteriolas se produce la caída más importante de presión. La amplitud de las oscilaciones decae en ellas todavía más acusadamente, y en los capilares apenas son apreciables dichas oscilaciones, como se aprecia en la figura ???. No obstante, la disminución de la presión en los vasos estrechos es menor de la que cabría esperar según la ley de Poiseuille. Ello se debe a que la viscosidad no es independiente del tamaño de los vasos, como en general ocurre para los líquidos simples, sino que disminuye en los vasos estrechos, con radios menores de $500\text{ }\mu\text{m}$. La sangre está compuesta fundamentalmente por glóbulos rojos y plasma. En los conductos estrechos, los glóbulos rojos circulan alineados por el centro, mientras que cerca de las paredes sólo circula básicamente el plasma, que posee un coeficiente de viscosidad similar al del agua (unas cuatro veces menor que el de la sangre en vasos gruesos).

En los **capilares**, con diámetros menores que los de los glóbulos rojos, el transporte es altamente peculiar. Los capilares se estiran hasta que los glóbulos pueden atravesarlos, ocupando toda la sección de aquéllos. El plasma se intercala entre los glóbulos rojos y avanza con un movimiento circular desde

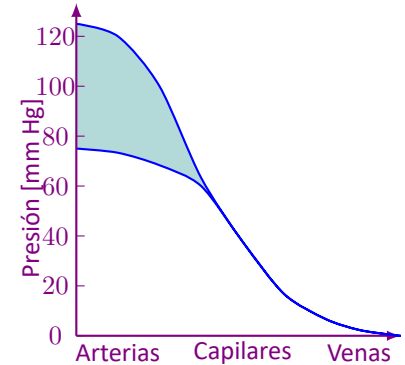


Figura 1.11: Variación de la presión en los vasos sanguíneos.

las paredes hasta el centro, similar al movimiento de las orugas mecánicas.

1.8 El corazón como bomba de presión

El corazón humano es una doble bomba de presión con dos cámaras en cada parte. Cada parte del corazón está compuesta por dos cámaras, la aurícula, que sirve de reserva de sangre, y el ventrículo, que es la verdadera bomba de presión. Los dos parámetros relevantes para la descripción del proceso de bombeo son la presión y el volumen del corazón, cuya variación detallamos a continuación.

Para calcular la potencia del corazón, necesitamos saber el trabajo que realiza en un latido en función de la presión y el volumen. El trabajo es la fuerza por la distancia, que para un fluido es igual a la presión (supuesta constante) por el cambio de volumen:

$$W = Fx = (pS)x = p \Delta V \quad (1.25)$$

en donde hemos tenido en cuenta que el cambio de volumen es igual a la sección por la distancia recorrida. En la figura ?? representamos la situación.

La potencia, P , se obtiene dividiendo el trabajo realizado durante un latido W por el intervalo de tiempo entre latidos, Δt :

$$P = \frac{W}{\Delta t} = p \frac{\Delta V}{\Delta t} = pQ \quad (1.26)$$

Esta expresión ha de ser evaluada separadamente para cada ventrículo. La potencia que desarrolla el corazón se emplea en mover el conjunto de la sangre venciendo el rozamiento producido por la viscosidad.

Pasemos a estimar las magnitudes de la anterior ecuación para el ventrículo izquierdo. El valor medio de p es de unos 100 mm de Hg. El caudal Q es $\Delta V \approx 0.065$ l dividido por $\Delta t \approx 1/75$ minutos (si se

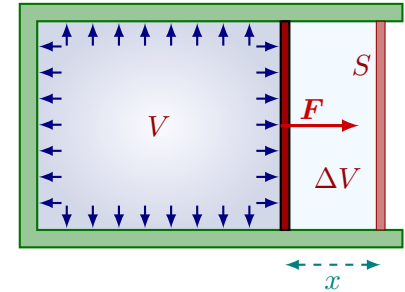


Figura 1.12: El fluido realiza un trabajo cuando cambia su volumen como consecuencia de la presión.

trata de un corazón que late a 75 pulsaciones por minuto). La potencia del ventrículo izquierdo es:

$$P = pQ = 100 \cdot 133 \frac{0.065 \cdot 0.001 \cdot 75}{60} = 1.1 \text{ W}$$

La potencia desarrollada por el ventrículo derecho es aproximadamente la décima parte de la del izquierdo, unos 0.1 W, ya que el caudal es el mismo y la presión la décima parte que la del izquierdo. Así, la potencia total en reposo del corazón es de 1.2 W. Para mantenerlo funcionando, necesitamos ingerir cuatro veces más calorías de las correspondientes a esta potencia, debido a nuestra eficiencia energética del 25 %.

Durante un ejercicio intenso, el caudal de sangre bombeado por el corazón es hasta seis veces mayor que el de reposo, mientras que la presión de la sangre apenas cambia, por lo que la potencia desarrollada es hasta seis veces mayor que en reposo.

Cuando el sistema circulatorio se obstruye parcialmente, o pierde flexibilidad, la resistencia al caudal del circuito aumenta, por lo que para mantener el riego sanguíneo constante es necesario incrementar la presión de bombeo. Se dice entonces que aumenta la tensión del corazón. Puede apreciarse en la ecuación (??) cómo ello requiere una mayor potencia, y por lo tanto un mayor desgaste, del corazón. Una tensión alta no indica un corazón potente, sino un sistema circulatorio con demasiada resistencia y, así pues, ineficiente.

Medida de la presión arterial

La presión arterial se mide mediante el esfigmomanómetro. Se rodea la parte superior del brazo, junto con un medidor de presión y un estetoscopio, con una banda hinchable. Al hincharse esta se aumenta la presión sobre el brazo. Cuando la presión aplicada es mayor que la máxima de la sangre (presión sistólica), esta apenas puede pasar y no se oye nada en el estetoscopio. Cuando la presión es

menor que la mínima de la sangre (presión diastólica), esta pasa sin dificultad y tampoco se oye nada. Para presiones intermedias la sangre pasa intermitentemente, resultando un flujo turbulento que produce un ruido periódico. Los límites del rango con ruido nos dan las presiones sistólica y diastólica. La medida se realiza en la parte superior del brazo para que se haga relativamente cerca del corazón y, sobre todo, para que se esté a la misma altura que aquél y así no haya cambio en la contribución hidrostática a la presión, ρgh . Los aparatos digitales modernos hacen básicamente lo mismo que el esfigmomanómetro, pero de forma automática.

Ejercicios

1.1 Un conducto, por el que circula un fluido, se ensancha en un punto, doblando el tamaño de su sección. Luego se divide en tres conductos iguales, con sección igual a la de la zona estrecha anterior. Determina, con respecto a las magnitudes de esta primera zona, lo siguiente:

- (a) velocidad del fluido en la zona ancha,
- (b) caudal del fluido en cada uno de los tres conductos iguales,
- (c) velocidad del fluido en estos conductos.

La ecuación de continuidad aplicada entre los distintos circuitos y la simetría de los tres pequeños nos permite responder todas las cuestiones:

- (a) En la zona ancha la velocidad es la mitad que en la primera zona.
- (b) En los conductos iguales el caudal es un tercio del caudal original.
- (c) En estos conductos, la velocidad es también igual a un tercio de la velocidad en el tramo primero.

1.2 Por un conducto circula aire a una velocidad de 60 km/h. ¿Qué cambio de presión se produce en un estrechamiento en el que la sección se reduce a un tercio de la original? (Supóngase constante la densidad del aire).

Podemos encontrar el cambio de presión en el estrechamiento aplicando la ecuación de Bernoulli (suponemos que la altura es la misma y no

incluimos el término correspondiente) y la de continuidad:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (3v_1)^2$$

La diferencia de presiones es igual a:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho 8v_1^2 = \frac{1}{2} 1.3 \cdot 8 \left(60 \frac{1000}{3600} \right)^2 = 1444 \text{ N/m}^2$$

1.3 Por una vena de 1 mm de radio circula sangre a una velocidad de 0.05 m/s. ¿Qué caudal de sangre circula por la vena? ¿Cuántas venas similares ha de haber para poder transportar un caudal total de 5 l/m?

El caudal es la sección por la velocidad:

$$Q = Av = \pi r^2 v = \pi 0.001^2 0.05 = 1.57 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{s}$$

El número de venas que se necesitan es igual al caudal total dividido por el que atraviesa una de ellas:

$$n = \frac{Q_T}{Q} = \frac{5}{1000 \cdot 60 \cdot 1.57 \cdot 10^{-7}} = 530$$

1.4 Una aorta posee un radio de 0.9 cm y la velocidad media de la sangre que la atraviesa es de 0.23 m/s. Después, la sangre se distribuye por 100 arteriolas similares de 3 mm de radio. Calcula:

- (a) el caudal total,
- (b) la velocidad de la sangre en las arteriolas,
- (c) la diferencia de presión debido al término cinético entre la aorta y las arteriolas.

(a) El caudal total es la sección por la velocidad:

$$Q_T = Av = \pi r^2 v = \pi (0.009)^2 (0.23) = 5.85 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) Para calcular la velocidad de la sangre en las arteriolas, aplicamos la ecuación de continuidad y despejamos v :

$$Q_T = 100 \pi r^2 v \Rightarrow v = \frac{5.85 \cdot 10^{-5}}{100 \pi (0.003)^2} = 0.021 \text{ m/s}$$

(c) La ecuación de Bernoulli nos da la diferencia de presiones debida al término cinético:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} (1050)(0.021^2 - 0.23^2) = -27.5 \text{ N/m}^2$$

1.5 La sección estrecha del dispositivo de la figura ?? es cuatro veces menor que la del resto del conducto. Determina la velocidad del fluido en función de la diferencia de alturas x .

La ecuación de Bernoulli y la de continuidad nos dicen:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho (4v_1)^2$$

De aquí deducimos la diferencia de presiones:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho (15v_1^2)$$

Dicha diferencia es proporcional a la altura x :

$$\Delta p = \rho g x = \frac{1}{2} \rho (15v_1^2) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2gx}{15}}$$

1.6 Un anemómetro como el de la figura ?? muestra una diferencia de altura entre el líquido de los conductos de 1.5 cm. El fluido que lo atraviesa es un plasma con una densidad de 1.03 kg/l. El radio de la parte ancha es de 1 cm y el de la estrecha de 0.4 cm. ¿Cuál es la velocidad del plasma?

La relación entre la sección de la parte ancha y de la estrecha es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1^2}{0.4^2} = 6.25$$

De acuerdo con el ejercicio anterior tenemos entonces que la velocidad del plasma es igual a:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gx}{(A_1/A_2)^2 - 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \cdot 0.015}{6.25^2 - 1}} = 0.088 \text{ m/s}$$

1.7 Podemos imaginar al xilem formado por conductos de 0.02 mm de radio que en su parte superior están cerrados por las hojas, que poseen unos poros de 5 nm de radio. Determina:

- (a) la máxima altura que puede alcanzar el agua en un capilar de 5 nm de radio,
- (b) la máxima presión, debida a la tensión superficial, que puede aguantar uno de esos capilares,
- (c) la máxima altura de un conducto si el agua que contiene aguanta una presión negativa de 32 atm,
- (d) el caudal que atraviesa un conducto de un árbol de 30 m de altura, si la presión en su parte superior es un diez por ciento mayor que la necesaria para mantener la columna de agua,
- (e) la presión necesaria para mantener el mismo caudal en un conjunto de vasos de radio 5 nm y cuya área total fuera igual a la del vaso del xilem.

(a) La altura máxima debida a la capilaridad de los poros de las hojas es:

$$\Delta h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 0.073 \cdot 1}{1000 \cdot 9.8 \cdot 5 \cdot 10^{-9}} = 2980 \text{ m}$$

(b) Hemos de traducir la altura anterior a su presión equivalente:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho g \Delta h = 1000 \cdot 9.8 \cdot 2980 = 2.92 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2 \\ &= 288 \text{ atm} \end{aligned}$$

(c) La altura que aguanta un conducto con un líquido que es capaz de soportar una presión negativa de 32 atm es:

$$\Delta h = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{32 \cdot 1.013 \cdot 10^5}{1000 \cdot 9.8} = 331 \text{ m}$$

(d) El caudal viene dado por la ley de Poiseuille considerando una diferencia de presiones igual al exceso de presión respecto de la necesaria para mantener la columna ($\rho g h$):

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\Delta p \pi R^4}{L 8 \eta} = \frac{0.1 \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 30 \pi (0.02 \cdot 10^{-3})^4}{30 \cdot 8 \cdot 0.001} \\ &= 6.16 \cdot 10^{-14} \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

(e) Necesitaríamos un total de $(0.02 \text{ mm}/5 \text{ nm})^2 = 16000000$ capilares de 5 nm por cada conducto de 0.02 mm de radio. El caudal a través de uno de ellos es 16000000 veces menor que el de un conducto. Para mantener dicho caudal necesitaríamos una diferencia de presiones igual a:

$$\begin{aligned} \Delta p_1 &= \frac{Q_1 L 8 \eta}{\pi R_1^4} = \frac{Q l 8 \eta 16000000^2}{16000000 \pi R^4} = 16000000 \Delta p \\ &= 16000000 \cdot 29400 = 4.7 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2 \end{aligned}$$

1.8 ¿Qué fuerza hay que ejercer sobre una superficie circular de 0.2 m de radio apoyada sobre una capa de sangre de 1 cm de grosor para que se mueva con una velocidad de 1 m/s?

La ecuación que nos da la fuerza de fricción, debida a la viscosidad, es:

$$F = \eta \frac{v}{d} A = 0.004 \frac{1}{0.01} \pi 0.2^2 = 0.05 \text{ N}$$

1.9 Tenemos una manguera de 10 m de largo y 1 cm de diámetro conectada a un grifo con una presión de 2 atm. Calcula:

- (a) el caudal de agua que circula por ella,
- (b) la velocidad media del agua,
- (c) la velocidad máxima,

(a) La ley de Poiseuille nos da el caudal que atraviesa la manguera:

$$Q = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta} = \frac{2 \cdot 1.013 \cdot 10^5}{10} \frac{\pi 0.005^4}{8 \cdot 0.001} = 0.005 \text{ m}^3/\text{s}$$

(b) La velocidad media es el caudal dividido por la sección:

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{0.005}{\pi 0.005^2} = 63.7 \text{ m/s}$$

(c) La velocidad máxima es doble que la media:

$$v_{\max} = 2v = 2 \cdot 63.7 = 127 \text{ m/s}$$

1.10 Para medir la viscosidad de un fluido utilizamos un conducto de 2 m de largo y 4 mm de radio. Si aplicamos una diferencia de presión de 10 mm de Hg entre los extremos del conducto, circula por él un caudal de 0,3 l/min. ¿Cuál es el coeficiente de viscosidad del líquido?

Podemos despejar el coeficiente de viscosidad de la ley de Poiseuille:

$$\eta = \frac{p_1 - p_2}{L} \frac{\pi R^4}{8Q} = \frac{10 \cdot 133}{2} \frac{\pi 0.004^4}{8 \cdot 0.3 \cdot 0.001} = 0.013 \text{ N s/m}^2$$

1.11 Queremos instalar un goteo en una finca. La longitud del conducto principal ha de ser de 1800 m, y deseamos un caudal de 100 l/min cuando bombeamos con una presión de 3 atm. ¿Qué radio interno ha de poseer el conducto principal?

Despejamos el radio del conducto a partir de la ecuación de Poiseuille:

$$R = \left(\frac{8\eta L Q}{\Delta p \pi} \right)^{1/4} = \left(\frac{8 \cdot 0.001 \cdot 1800 \cdot 0.1}{3 \cdot 1.013 \cdot 10^5 \pi 60} \right)^{1/4} = 0.013 \text{ m}$$

Se ha tenido en cuenta que las unidades en l/min hay que pasarlas a m³/s y las atmósferas a pascuales.

1.12 Encuentra la relación entre el número de Reynolds de un objeto que se mueve con igual velocidad en el aire y en el agua.

La relación entre los números de Reynolds en el aire Re_1 y en el agua Re_2 es:

$$\frac{Re_1}{Re_2} = \frac{\rho_1 v D \eta_2}{\eta_1 \rho_2 v D} = \frac{1.2 \cdot 0.001}{18 \cdot 10^{-6} 1000} = \frac{1}{15} = 0.067$$

Hemos tomado la densidad del aire a 20°C.

1.13 Estima aproximadamente el número de Reynolds de:

- (a) un nadador capaz de hacer 100 m en 52 s,
- (b) un atleta que recorre 100 m en 10 s,
- (c) un avión de 3 m de radio volando a 900 km/h,
- (d) una partícula de una micra de diámetro que se desplaza en el agua a 0.01 m/s.

(a) El número de Reynolds del nadador es:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 100 \cdot 0.3}{0.001 \cdot 52} = 5.8 \cdot 10^5$$

ρ y η corresponden al agua, y hemos supuesto un diámetro de 0.3 m.

(b) El número de Reynolds del atleta es aproximadamente:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1.2 \cdot 100 \cdot 0.6}{18 \cdot 10^{-6} \cdot 10} = 4 \cdot 10^5$$

ρ y η corresponden al aire, y hemos supuesto un diámetro de 0.6 m.

(c) Para el avión:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1.2 \cdot 900 \cdot 6}{18 \cdot 10^{-6} \cdot 3.6} = 10^8$$

(d) El número de Reynolds de la partícula microscópica es:

$$\text{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{1000 \cdot 0.01 \cdot 10^{-6}}{0.001} = 0.01$$

1.14 ¿Para qué caudal se volvería turbulento un flujo de agua en una tubería de 1 cm de diámetro?

La velocidad a la que se volvería turbulento el flujo, suponiendo un valor crítico del número de Reynolds de 2000, es:

$$v = \frac{\eta \text{Re}}{\rho D} = \frac{0.001 \cdot 2000}{1000 \cdot 0.01} = 20 \text{ m/s}$$

El caudal correspondiente a esa velocidad vale:

$$Q = vA = v\pi R^2 = 20 \pi 0.005^2 = 0.00157 \text{ m}^3/\text{s}$$

1.15 Una aorta posee una sección de 4 cm². ¿A qué velocidad comenzará a hacerse turbulento el flujo sanguíneo? ¿Cuál será entonces el caudal?

La velocidad crítica, por encima de la cual el flujo se hace turbulento, en la aorta será:

$$v = \frac{\eta \text{Re}}{\rho D} = \frac{0.004 \cdot 2000}{1050 \cdot 2 (0.0004/\pi)^{1/2}} = 0.34 \text{ m/s}$$

El caudal correspondiente a esa velocidad es:

$$Q = vA = 0.0004 \cdot 0.34 = 0.000135 \text{ m}^3/\text{s}$$

1.16 ¿Con qué velocidad se sumergirá en el agua un objeto esférico de 1.2 kg/l de densidad y 0.8 cm de diámetro?

Suponemos que la fuerza de rozamiento que ejerce el agua sobre el objeto viene dada por la ley de Stoke. La velocidad de caída se consigue cuando dicha fuerza es igual al peso del objeto menos el empuje del agua:

$$\begin{aligned} v &= \frac{2}{9\eta} r^2 g (\rho_o - \rho_a) \\ &= \frac{2}{9 \cdot 0.001} 0.004^2 \cdot 9.8 \cdot (1.2 - 1) 1000 = 7.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

1.17 Una muestra de sangre posee una velocidad de sedimentación 4 veces superior a la normal debido a que los glóbulos rojos se han unido parcialmente entre sí. Si suponemos que en el caso normal estos no están unidos en absoluto, ¿cuántos glóbulos rojos se agregan en media formando nuevas partículas efectivas en la muestra considerada?

La velocidad de sedimentación se obtiene igualando la fuerza de rozamiento al peso del objeto menos el empuje del agua. Como dicha velocidad de sedimentación es proporcional al radio al cuadrado, tenemos:

$$\frac{v'}{v} = \frac{r'^2}{r^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad r' = 2r$$

La relación entre el volumen de uno de los nuevos agregados de partículas y el de la partícula original es:

$$\frac{V'}{V} = \frac{r'^3}{r^3} = 8$$

Luego cada nueva partícula es el agregado de 8 glóbulos rojos.

1.18 En una arteriola de 20 cm de longitud la presión sanguínea cae 18 mm de Hg. Por ella circula un caudal de 0.1 l/min. ¿Cuál es el radio de la arteriola?

Aplicamos la ley de Poiseuille a la arteriola y despejamos el radio:

$$R = \left(\frac{QL8\eta}{(p_1 - p_2)\pi} \right)^{1/4} = \left(\frac{\frac{0.1}{60000} 0.2 \cdot 8 \cdot 0.004}{18 \cdot 133 \pi} \right)^{1/4} \\ = 0.0011 \text{ m}$$

1.19 Supongamos que la caída de presión por unidad de longitud es constante en el cuerpo humano, debido a la forma de bifurcarse los vasos. Si el área total de los capilares es 500 veces mayor que la de la aorta, determina:

- (a) el número de capilares,
- (b) la sección de cada uno de ellos, sabiendo que la de la aorta es de 3 cm²,
- (c) la velocidad de la sangre en los capilares, teniendo en cuenta que el caudal total es de 5 l/min.

(a) Si la caída de presión por unidad de longitud es constante, el área total de n vasos es igual a $\sqrt{n}$ por el área del vaso original. Por tanto:

$$\sqrt{n} = 500 \quad \Rightarrow \quad n = 500^2 = 250000$$

(b) La sección de un capilar es el área de la aorta dividida por $\sqrt{n}$:

$$A_c = \frac{A_a}{\sqrt{n}} = \frac{3}{500} = 0.006 \text{ cm}^2$$

(c) La velocidad de la sangre en la aorta es:

$$v_a = \frac{Q}{A_a} = \frac{5}{60000 \cdot 0.0003} = 0.28 \text{ m/s}$$

La ecuación de continuidad nos permite determinar la velocidad de la sangre en los capilares: por el período entre latidos:

$$v_c = \frac{Q}{A_c} = \frac{v_a}{500} = 0.00056 \text{ m/s}$$

1.20 Un corazón bombea 0.08 l de sangre, 60 veces por minuto, con una presión media de 110 mm de Hg. La aorta correspondiente posee un radio de 1.2 cm. Calcula:

- (a) el caudal sanguíneo,
- (b) la potencia que ejerce el ventrículo izquierdo,
- (c) la velocidad de la sangre en la aorta,

(a) El caudal sanguíneo es el volumen bombeado en cada latido dividido

$$Q = \frac{V}{T} = \frac{0.08 \cdot 60}{1000 \cdot 60} = 0.00008 \text{ m}^3/\text{s} = 4.8 \text{ l/min}$$

(b) La potencia es igual al caudal por la presión:

$$P = Qp = 0.00008 \cdot 110 \cdot 133 = 1.17 \text{ W}$$

(c) La velocidad es igual al caudal dividido por la sección:

$$v = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{0.00008}{\pi 0.012^2} = 0.18 \text{ m/s}$$